Bifurkationen
(Klassifikation)

Alexander Rack

Newton hat ganz Recht, wenn er bemerkt, daß dasjenige, was wir Gesetz in der Natur nennen, eigentlich nicht existiert, und daß es nur Formeln sind, die unserer Fassungskraft zu Hilfe kommen, um eine Reihe von Erscheinungen in der Natur zu erklären.

Heinrich Heine

Inhalt

1. Drei Fragen zur Bifurkation 3

2. Lineare Stabilitätsanalyse 6

3. Klassifikation von Bifurkationen
   - 3.1 Sattel-Knoten-Bifurkation 7
   - 3.2 Transkritische Bifurkation 10
   - 3.3 Heugabel-Bifurkation 13
   - 3.4 Hopf-Bifurkation 16
   - 3.5 Unterteilung in superkritische und subkritische Bifurkationen 19

4. Beispiele für Bifurkationen
   - 4.1 Zentrifugalrotator 23
   - 4.2 Tacoma Bridge 25

5. Zusammenfassung 28

6. Literaturverzeichnis 29

www.user.tu-berlin.de/rackrfhe/bifurkation

1. Drei Fragen zur Bifurkation

(Bifurkation – lat. Verzweigung)

Welche Voraussetzungen braucht man?

- Um Untersuchungen durchzuführen, braucht man etwas, das sich beobachten läßt. Damit die benötigte Mathematik überschaubar bleibt, ist es in unserem Fall ein physikalisches Setting, dessen Dynamik sich als System nichtlinearer Differentialgleichungen 1. Ordnung formulieren läßt:

$$\dot{x} = F[x(t), t]$$

$$(x \in \Re^n,\ \textit{dynamische Variable};\ F : \Re^n \times \Re_t \to \Re^n,\ \textit{Vektorfeld})$$

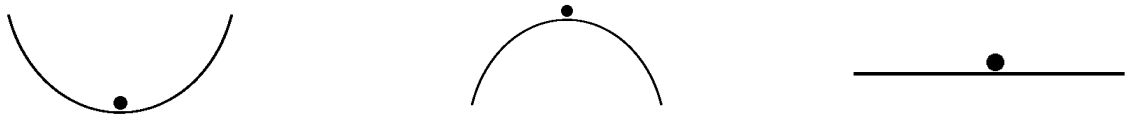
  Die Verwendung des Variablennamens „x“ verführt zu der Annahme, es handele sich um räumliche Koordinaten. Das kann, muß aber nicht der Fall sein. Bei einem Halbleiterbauelement ist die dynamische Variable zum Beispiel die Stromdichte oder bei einem Laser die Anzahl angeregter Atome (siehe zum Beispiel „Nonequilibrium Phase Transitions in Semiconductors”, E.Schöll).

- In der Medizin spricht man von Bifurkationen bei Verzweigungen von zum Beispiel Blutgefäßen, in der Geographie bei Flußverzweigungen. Für die Physik ist das Verhalten von Fixpunkten im Phasenraum (Sattelpunkt, (in)stabiler Knoten, (in)stabiler Fokus) von Interesse, da sich dieses in Abhängigkeit von verschiedenen Kontrollparametern verzweigen kann.

  An einem Fixpunkt x_0 verschwindet der Geschwindigkeitsvektor des Vektorfeldes, das System kann sich aus diesem Punkt nicht herausbewegen, es gilt: $\dot{x} = F[x(t), t] = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0$.

- Fixpunkte unterscheiden sich in ihrem Stabilitätsverhalten. Es sind also geeignete Begriffe beziehungsweise Definitionen zur Klassifikation der Stabilität der Fixpunkte zu verwenden (siehe auch vor-

angegangen Vortrag „Lineare Stabilitätsuntersuchung“, Punkt 2 dieses Vortrags und zum Beispiel „Mechanik“, F.Scheck).



stabil labil indifferent

Was macht man, um Bifurkationen zu klassifizieren?

- Mit den Methoden der Linearen Stabilitätsanalyse werden die Fixpunkte auf ihre Stabilität untersucht. Bei komplexeren Bifurkationen wie zum Beispiel der Hopf-Bifurkation treten neben Fixpunkten noch andere Attraktoren auf, in diesem Beispiel ein Grenzzyklus. Zur Untersuchung der Stabilität der Grenzzyklen muß auf andere Untersuchungsmethoden ausgewichen werden (zum Beispiel numerische Simulationen).

- Die Fixpunkte hängen von Kontrollparametern μ des Systems ab. Um Bifurkationen zu beobachten, werden diese variiert.

Was passiert?

- Liegt eine Bifurkation vor, so ändert sich die Struktur und Zahl der speziellen Lösungen des Systems nichtlinearer Differentialgleichungen 1. Ordnung (also der Fixpunkte) bei bestimmten Werten des Kontrollparameters m_c (Bifurkationspunkt).

Definition:

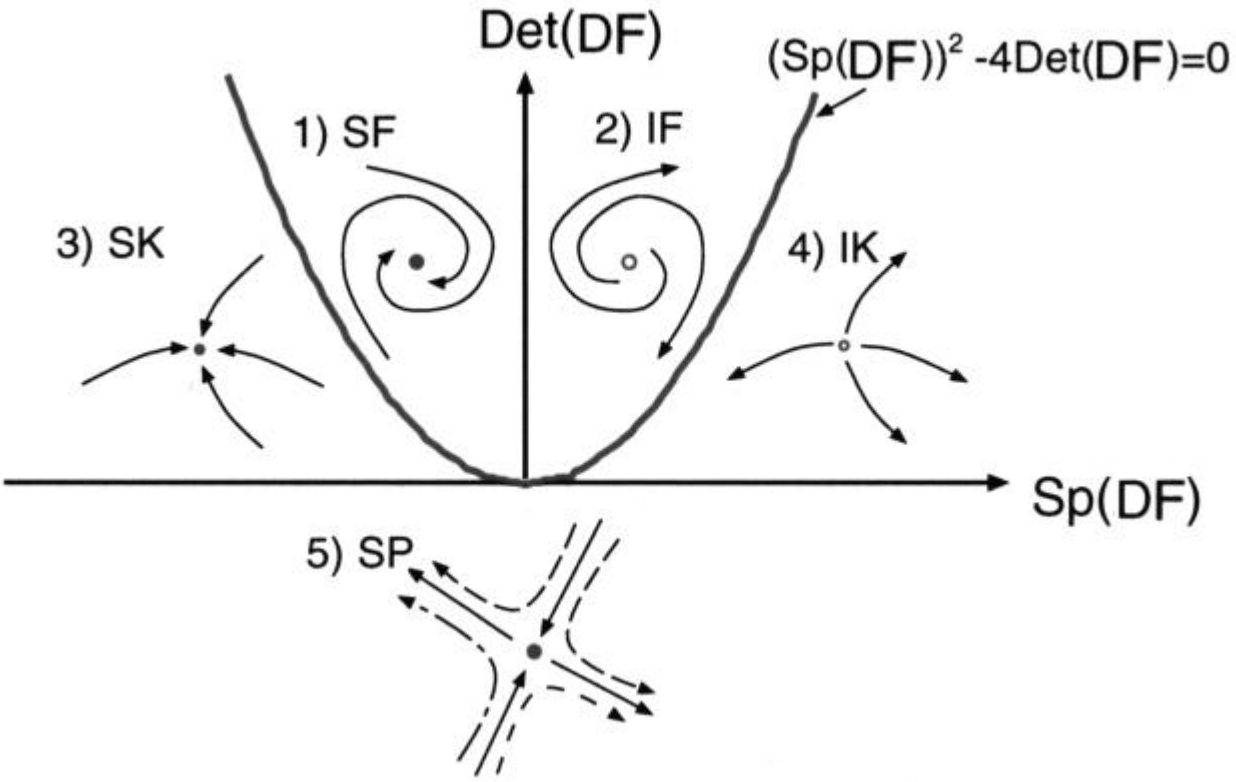
Der Begriff „Bifurkation“ oder „Verzweigung“ bezeichnet den Übergang von einem Systemzustand in einen qualitativ anderen als Folge einer im allgemeinen stetigen Änderung eines oder mehrerer Parameter $\mu \in \Re$ (Kontrollparameter).

Ein Punkt m_c im Parameterraum, bei dem qualitativ neue Bewegungstypen auftreten, heißt Bifurkationspunkt.

Bemerkungen:

- Eine notwendige Voraussetzung für Bifurkation ist die Nichtlinearität der Differentialgleichungen.
- Die Zahl und Art der Fixpunkte (Attraktoren) kann sich schlagartig bei m_c ändern.
- Der Begriff Bifurkation ist verknüpft mit dem Begriff Stabilitätswechsel.
- Da die Physik immer mit realen Größen als Meßwerte arbeitet, sind Kontrollparameter und dynamische Variablen reell.

2. Lineare Stabilitätsanalyse



Linearisieren des Differentialgleichungssystems für kleine Auslenkungen $dx := x - x_0$ ergibt:

$$\boxed{d\dot{x} = \left(DF\right)_{x_0} dx}$$

<u>Kriterium für Stabilität (lokal)</u>: Wenn x_0 stabil ist, hat keiner der Eigenwerte der Jakobi-Matrix $\left(DF\right)_{x_0}$ einen positiven Realteil.

Die genaue Klassifizierung der Fixpunkte erfolgt nach (siehe Graphik):

1. stabiler Fokus (SF): Sp(DF) < 0, Det(DF) > 0, $(\mathrm{Sp(DF)})^2 < 4\mathrm{Det(DF)}$
2. instabiler Fokus (IF): Sp(DF) > 0, Det(DF) > 0, $(\mathrm{Sp(DF)})^2 < 4\mathrm{Det(DF)}$
3. stabiler Knoten (SK): Sp(DF) < 0, Det(DF) > 0, $(\mathrm{Sp(DF)})^2 > 4\mathrm{Det(DF)}$
4. instabiler Knoten (IK): Sp(DF) > 0, Det(DF) > 0,
   $(\mathrm{Sp(DF)})^2 > 4\mathrm{Det(DF)}$
5. Sattelpunkt: Det(DF) < 0 .

3.1 Sattel-Knoten-Bifurkation

Die Sattel-Knoten-Bifurkation gehört zusammen mit der transkri-tischen und der Heugabel-Bifurkation zu der Gruppe der „Eigenwert-Null-Bifurkationen“. Charakteristisch für diese Bifurkationen ist ein verändertes Stabilitätsverhalten des Fixpunktes bei Vorzeichen-wechsel des zugehörigen Eigenwertes der Jakobi-Matrix, also:

Eigenwert-Null-Bifurkationen:

$$\begin{array}{ccc} l < 0 & & l > 0 \\ \text{stabiler Fixpunkt} & \longleftrightarrow & \text{instabiler Fixpunkt} \end{array} \quad .$$

Um ein anschauliches Verständnis der Sattel-Knoten-Bifurkation zu erhalten, betrachten wir ein dynamisches System:

$$\dot{x} = F[x(t), t]$$

wobei der Übersichtlichkeit halber das System eindimensional sein soll. Als Differentialgleichung verwenden wir den einfachsten nicht-linearen Typ, das ist der Typ von Differentialgleichung (in Normal-form), bei dem Sattel-Knoten-Bifurkationen auftreten:

$$\dot{x} = m - x^2 \qquad (x, m \in \Re) \ .$$

Wie anfangs schon erläutert, sind bei einem physikalischen System dynamische Variable und Kontrollparameter reell.

Gesucht sind nun die stationären Lösungen der Differentialgleichung, um Aussagen über deren Stabilitätsverhalten treffen zu können.

Die stationäre Lösung ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} & \dot{x} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = m - x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x_0^{(1)} = \sqrt{m} \qquad \wedge \qquad x_0^{(2)} = -\sqrt{m} \end{aligned}$$

Ein erstes wichtiges Ergebnis kann hier schon abgelesen werden: Dynamische Variable und Kontrollparameter sind reell, für $\mu < 0$ würde

der Wurzelausdruck aber komplexe Werte annehmen, was zu einem Widerspruch führt. Demzufolge existiert für $\mu < 0$ kein Fixpunkt!

Nun folgt die lineare Stabilitätsuntersuchung. Zuerst muß die Differentialgleichung für kleine Auslenkungen dx linearisiert werden.

Im allgemeinen Fall lautet die linearisierte Differentialgleichung:

$$d\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_{x_0} dx_k \quad \Leftrightarrow \quad d\dot{x} = \left(DF\right)_{x_0} dx \; .$$

Für den vorliegenden Fall ergibt sich also:

$$d\dot{x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(m - x^2 \right) \right)_{x_0} dx = -2x_0 dx$$

und somit für die Determinante der Jakobi-Matrix der Ausdruck -2x, das Problem ist eindimensional.

Die allgemeine Lösung dieser linearisierten Differentialgleichung ist:

$$\begin{aligned} dx(t) &= Ae^{-2x_0 t} \\ &= \begin{cases} Ae^{-2\sqrt{m}t} & \text{für} \quad x_0^{(1)} = \sqrt{m} \\ Ae^{2\sqrt{m}t} & \text{für} \quad x_0^{(2)} = -\sqrt{m} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Begriffe Sattelpunkt und stabiler Knoten sind im Mehrdimensionalen sinnvoll (siehe gegebenenfalls „2. Lineare Stabilitätsanalyse“), wo noch mindestens 1 weiterer, stets negativer Eigenwert existiert. Das betrachtete System ist aber eindimensional, am anschaulichsten sind Aussagen durch Betrachten der Lösungen der linearisierten Differentialgleichung zu erhalten:

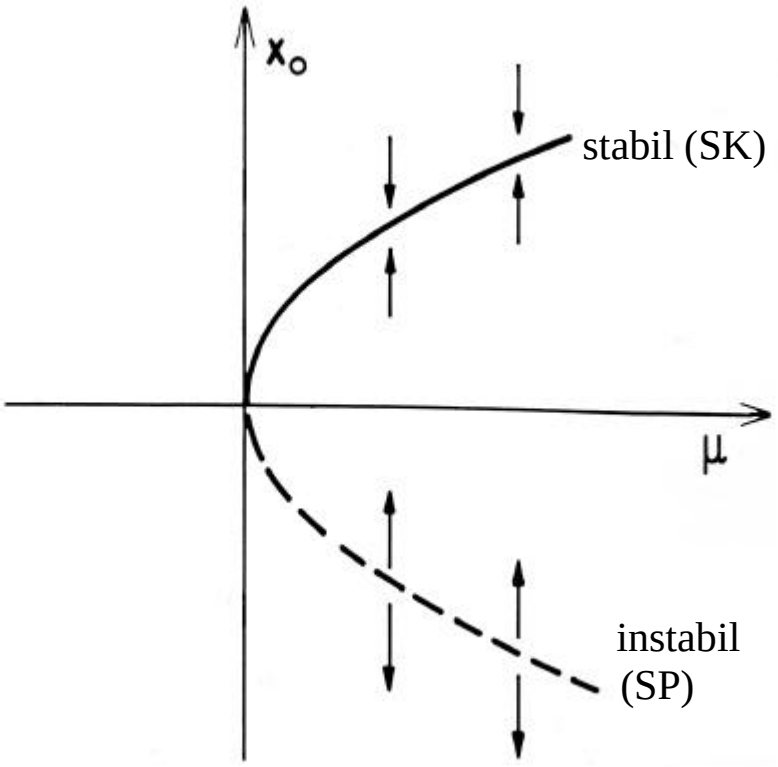
Für den Fall $x_0^{(1)} = \sqrt{m}$ ergibt sich als Lösung der linearisierten Differentialgleichung eine abklingende Exponentialfunktion. Diese Schar von Fixpunkten ist also stabil (allgemein: stabile Knoten).

Für den Fall $x_0^{(2)} = -\sqrt{m}$ ergibt sich als Lösung der linearisierten

Differentialgleichung eine anschwellende Exponentialfunktion. Diese Schar von Fixpunkten ist also instabil (allgemein: Sattelpunkte).

Die so erhaltenen Ergebnisse stimmen mit der Klassifizierung der Fixpunkte mittels Linearer Stabilitätsanalyse überein.

Trägt man die Fixpunkte $x_0^{(i)}$ über dem Kontrollparameter μ auf, so ergibt sich folgendes Bild im Parameterraum:



Ein Sattelpunkt und ein stabiler Knoten vereinigen sich und verschwinden dann, denn für $\mu < 0$ existiert kein Fixpunkt. Am Bifurkationspunkt $m_c = 0$ entsteht ein sogenannter Sattel-Knoten.

Daher der Name: Sattel-Knoten-Bifurkation !

3.2 Transkritische Bifurkation

Um eine Vorstellung der transkritischen Bifurkation zu erhalten, geht man genauso vor, wie bei der Sattel-Knoten-Bifurkation, zuerst betrachten wir ein dynamisches System:

$$\dot{x} = F[x(t), t] \quad ,$$

die Differentialgleichung vom nichtlinearen Typ wird eine Stufe komplizierter gewählt, das ist der Typ von Differentialgleichung (in Normalform), bei dem Transkritische Bifurkationen auftreten:

$$\dot{x} = mx - x^2 \qquad\qquad (x, m \in \Re) \quad .$$

Wiederum gesucht sind nun die stationären Lösungen der Differentialgleichung, um Aussagen über deren Stabilitätsverhalten treffen zu können.

Die stationäre Lösung ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} & \dot{x} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = mx - x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x_0^{(1)} = 0 \quad \wedge \quad x_0^{(2)} = m \end{aligned}$$

Für diese Fixpunkte ist die lineare Stabilitätsuntersuchung durchzuführen. Im allgemeinen Fall lautet die linearisierte Differentialglei-chung für kleine Auslenkungen dx:

$$d\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_{x_0} dx_k \quad \Leftrightarrow \quad d\dot{x} = (DF)_{x_0} dx$$

Für den vorliegenden Fall ergibt sich also:

$$d\dot{x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(mx - x^2 \right) \right)_{x_0} dx = (m - 2x_0) dx$$

und somit für die Determinante der Jakobi-Matrix der Ausdruck $m - 2x$, das Problem ist eindimensional.

Betrachten wir nun den 1. Fixpunkt und die zugehörige, linearisierte Differentialgleichung:

$$x_0^{(1)} = 0$$
$$\Rightarrow \quad d\dot{x} = m dx$$

Die allgemeine Lösung dieser linearisierten Differentialgleichung lautet:

$$dx(t) = Ae^{mt} \begin{cases} stabil \;\; für \;\; m < 0 \\ instabil \;\; für \;\; m > 0 \end{cases}$$

Für den 2. Fixpunkt und die zugehörige, linearisierte Differentialgleichung ergibt sich:

$$x_0^{(2)} = m$$
$$\Rightarrow \quad d\dot{x} = -m dx$$

Die allgemeine Lösung dieser linearisierten Differentialgleichung lautet:

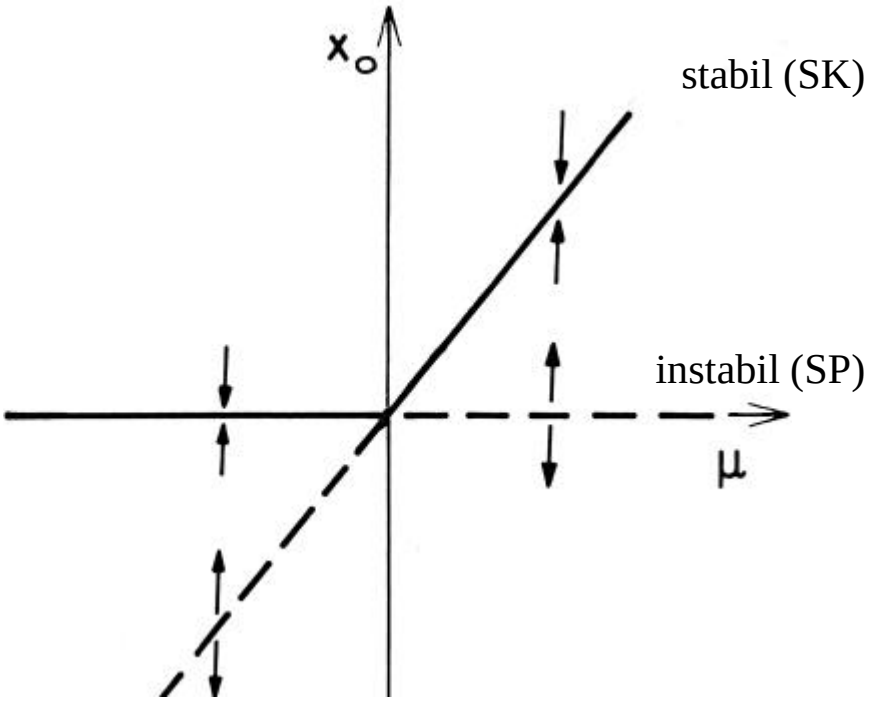
$$dx(t) = Ae^{-mt} \begin{cases} stabil \;\; für \;\; m > 0 \\ instabil \;\; für \;\; m < 0 \end{cases}$$

Der Fixpunkt $x_0^{(1)} = 0$ ist also stabil für $\mu > 0$ (stabiler Knoten) und instabil für $\mu < 0$ (Sattelpunkt).

Der Fixpunkt $x_0^{(2)} = m$ hingegen ist stabil für $\mu < 0$ (stabiler Knoten) und instabil für $\mu > 0$ (Sattelpunkt).

Mathematisch anschaulich läßt sich dieses Ergebnis wieder mit den anschwellenden und abklingenden Exponentialfunktionen in Abhängigkeit vom Vorzeichen des Kontrollparameters μ herleiten. Die so erhaltenen Ergebnisse stimmen mit der Klassifikation der Fixpunkte mittels Linearer Stabilitätsanalyse überein.

Im Parameterraum ergibt sich damit folgendes Bild:



Ein Sattelpunkt und ein stabiler Knoten vereinigen und trennen sich wieder. Am Bifurkationspunkt $m_c = 0$ überschneiden sich die Graphen des ersten und zweiten Fixpunktes (lat. trans – über, jenseits), daher der Name: Transkritische Bifurkation.

Während des Seminarvortrags wurde ein Beispiel aus der Anwen-dung, der Laser, genannt: Hier ist „x“ die emittierte Photonenzahl.
Unterhalb der Laserschwelle, also für $\mu < 0$, gibt es keine Verstär-kung, der Ast $x_0^{(1)} = 0$ ist stabil, der instabile Ast fehlt allerdings, da es keine negative Verstärkung gibt. Oberhalb der Laserschwelle, also für $\mu > 0$, wird der Ast $x_0^{(2)} = m$ stabil, es gibt Verstärkung. Der Ast $x_0^{(1)} = 0$, also der Bereich ohne Verstärkung, wird instabil.

3.3 Heugabel-Bifurkation

Um eine Vorstellung der Heugabel-Bifurkation zu erhalten, geht man genauso, wie bei den vorangegangenen Bifurkationen vor, zuerst betrachtet wir ein dynamisches System:

$$\dot{x} = F[x(t), t]$$

die Differentialgleichung vom nichtlinearen Typ wird wieder eine Stufe komplizierter gewählt, das ist der Typ von Differentialgleichung (in Normalform), bei dem Heugabel-Bifurkationen auftreten:

$$\dot{x} = mx - x^3 \qquad (x, m \in \Re) \quad .$$

Auch hier werden die stationären Lösungen der Differentialgleichung und Aussagen über deren Stabilitätsverhalten gesucht.

Die stationäre Lösung ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} & \dot{x} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = mx - x^3 \\ \Leftrightarrow \quad & x_0^{(1)} = 0 \quad \wedge \quad x_0^{(2/3)} = \pm\sqrt{m} \end{aligned}$$

Dynamische Variable und Kontrollparameter sind reell, für $\mu < 0$ würde der Wurzelausdruck aber komplexe Werte annehmen, was zu einem Widerspruch führt. Demzufolge existieren für $\mu < 0$ die Fixpunkte $x_0^{(2/3)}$ nicht!

Warum die Punkte $x_0^{(2/3)}$ zusammengefaßt betrachtet werden, ergibt sich im Verlauf der folgenden Rechnung.

Für die drei Fixpunkte ist die lineare Stabilitätsuntersuchung durchzuführen. Zuerst muß die Differentialgleichung für kleine Aus-lenkungen dx linearisiert werden.

Im allgemeinen Fall lautet die linearisierte Differentialgleichung:

$$d\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_{x_0} dx_k \quad \Leftrightarrow \quad d\dot{x} = (DF)_{x_0} dx$$

Für den vorliegenden Fall ergibt sich also:

$$d\dot{x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(mx - x^3 \right) \right)_{x_0} dx = (m - 3x_0^2) dx$$

und somit für die Determinante der Jakobi-Matrix der Ausdruck $m - 3x^2$, das Problem ist eindimensional.

Anschaulich lassen sich die Stabilitätsüberlegungen für die Fixpunkte wieder mit den anschwellenden und abklingenden Exponential-funktionen durchführen:

Betrachten wir nun den 1. Fixpunkt und die zugehörige linearisierte Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} & x_0^{(1)} = 0 \\ \Rightarrow \quad & d\dot{x} = m dx \quad . \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung dieser linearisierten Differentialgleichung lautet:

$$dx(t) = Ae^{mt} \begin{cases} stabil \;\; für \;\; m < 0 \\ instabil \;\; für \;\; m > 0 \end{cases} \quad .$$

Für den 2. und 3. Fixpunkt und die zugehörige, linearisierte Differen-tialgleichung ergeben sich:

$$\begin{aligned} & x_0^{(2/3)} = \pm\sqrt{m} \\ \Leftrightarrow \quad & d\dot{x} = (m - 3(\pm\sqrt{m})^2) = -2m dx \quad . \end{aligned}$$

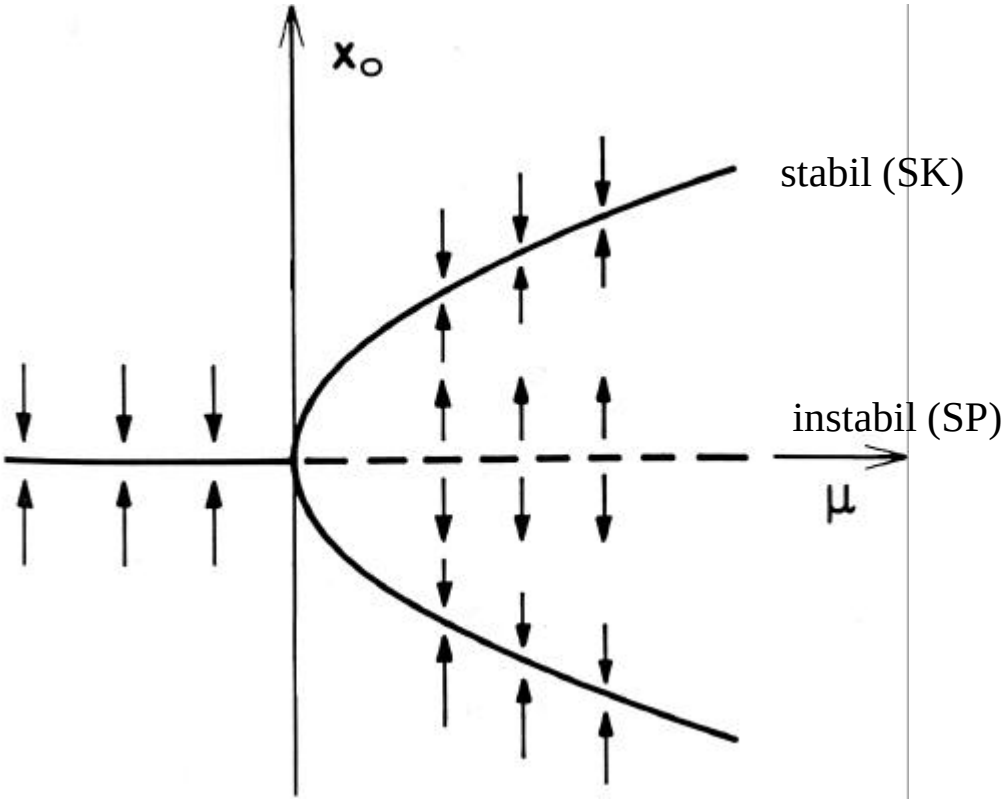
Für beide Fixpunkte gilt also dieselbe Gleichung.

Die allgemeine Lösung dieser linearisierten Differentialgleichung lautet:

$$dx(t) = Ae^{-mt} \quad \text{stabil, da } \mu > 0 \quad .$$

Der Fixpunkt $x_0^{(1)} = 0$ ist also stabil für $\mu > 0$ (stabiler Knoten) und instabil für $\mu < 0$ (Sattelpunkt), die Fixpunkte $x_0^{(2/3)} = \pm\sqrt{m}$ sind stabil, da $\mu > 0$ (stabiler Knoten), für $\mu < 0$ existieren die Fixpunkte $x_0^{(2/3)}$ nicht.

Im Parameterraum ergibt sich damit folgendes Bild:



Ein Fixpunkt ändert seine Stabilität unter Entstehung zweier neuer Äste. Das Bild im Parameterraum inspiriert den Namen Heugabel oder Stimmgabel Bifurkation (engl. pitchfork bifurcation).

3.4 Hopf-Bifurkation

Die Hopf-Bifurkation unterscheidet sich von den vorangegangen Bifurkationstypen. Die wesentlichen Bedingungen für das Auftreten einer Hopf-Bifurkation sind:

- das dynamische System hat mindestens zwei Komponenten
- die Jacobi-Matrix hat zwei konjugiert komplexe Eigenwerte
- statt des Wechsels von einem Fixpunkt zu einem anderen geht ein Fixpunkt in einen Grenzzyklus über.

Die Hopf-Bifurkation ist keine Eigenwert-Null-Bifurkation!

Es handelt sich also um einen komplizierteren Bifurkationstyp. Dementsprechend läßt sich eine anschauliche Vorstellung nicht ganz so simpel aufbauen. Ein einfaches Beispiel ist das Differential-gleichungssystem:

$$\dot{x} = mx - y - (x^2 + y^2)x \qquad \text{I}$$
$$\dot{y} = my + x - (x^2 + y^2)y \qquad \text{II} \qquad (x, y \in \Re)\,.$$

Um erste Aussagen treffen zu können, bietet sich eine Transformation auf Polarkoordinaten an, mit:

$$x = rCos[j\,],\ \ y = rSin[j\,]$$

sowie bilden der Linearkombinationen

$$\text{I}\cdot Cos[j\,] + \text{II}\cdot Sin[j\,] \quad \text{und} \quad -\text{I}\cdot Sin[j\,] + \text{II}\cdot Cos[j\,]$$

ergeben sich die entkoppelten Differentialgleichungen:

$$\dot{r} = mr - r^3 \ \text{und}\ \ \dot{j} = 1 \qquad .$$

Die Differentialgleichung für r hat die gleiche Form, wie die Differentialgleichung der Heugabel-Birfurkation, es können also die Lösungen mit $r \geq 0$ übernommen werden.
Die zeitliche Änderung des Winkels ist konstant, hier kann es keine stationären Lösungen geben, also auch keine Bifurkation.

Der 1. Fixpunkt ergab sich bei der Heugabel Bifurkation zu:

$$r_0^{(1)} = 0 \qquad \wedge \qquad j = 1$$

mit der linearisierten Differentialgleichung:

$$dr(t) = Ae^{mt} \begin{cases} stabil \;\; für \;\; m < 0 \\ instabil \;\; für \;\; m > 0 \end{cases} .$$

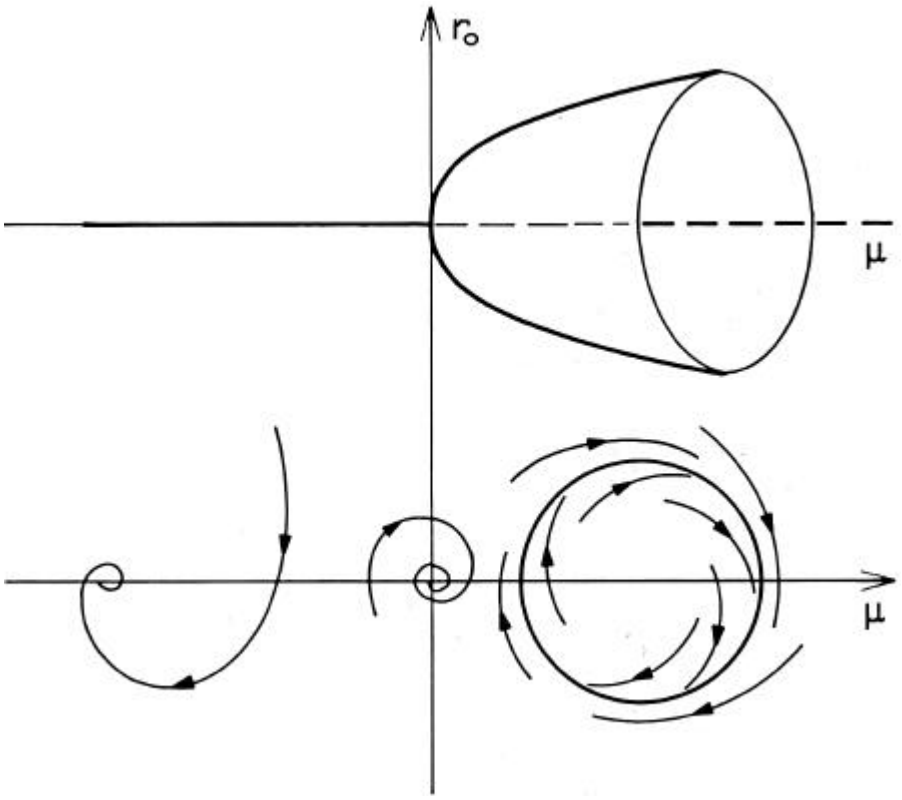
Für den 2. und 3. Fixpunkt ergaben sich:

$$r_0^{(2/3)} = \pm\sqrt{m} \qquad \wedge \qquad j = 1$$

mit der linearisierten Differentialgleichung:

$$dx(t) = Ae^{-mt} \quad \text{stabil, da } \mu > 0$$

Trägt man wiederum die Fixpunkte über dem Kontrollparameter auf, so ergibt sich folgendes Bild:



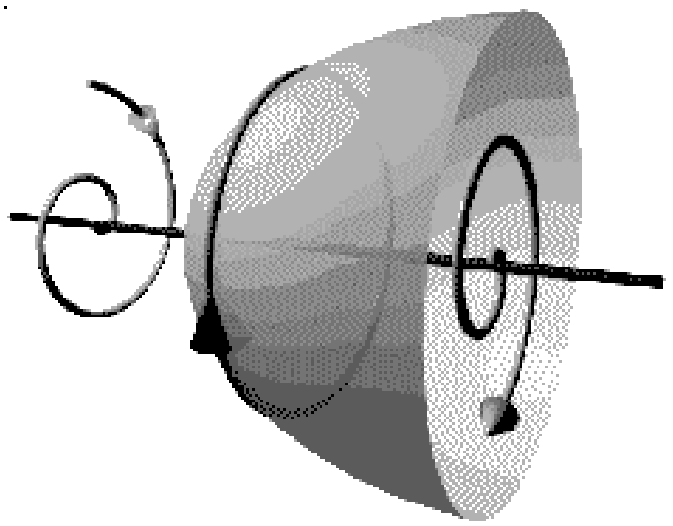
- siehe Mathematica-Notebook -

Die Betrachtung der entkoppelten Differentialgleichungen erklärt nur anschaulich, warum für die dynamische Variable r bei Variation des Kontrollparameters μ eine Bifurkation auftritt.
Zieht man ferner in Betracht, daß das Problem mehrdimensional ist, läßt sich erklären, warum aus dem zweidimensionalen Bild der Heugabel Bifurkation der dreidimensionale Paraboloid im obigen Diagramm wird.

Um präzise Aussagen über das Verhalten des dynamischen Systems bei Variation von μ treffen zu können, muß die Lineare Stabilitäts-analyse durchgeführt werden. Die Rechnung und Ergebnisse sind im beiliegenden Mathematica-Notebook aufgeführt.

Demnach beschreibt die zweite Lösung stabile Kreisbahnen, in die sich alle Bahnen sowohl von außen als auch von innen spiralförmig mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{j} = 1$ hineinwenden. Die Bezeichnung ist im allgemeinen „Grenzzyklus“ (engl. limit cycle).

In etwas anderer Darstellung:



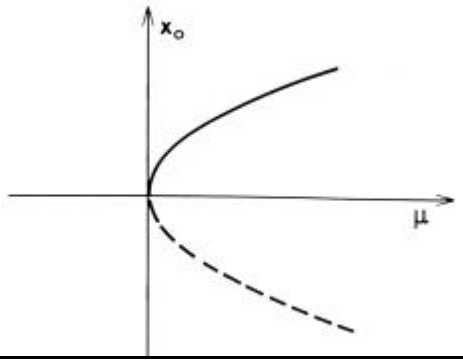
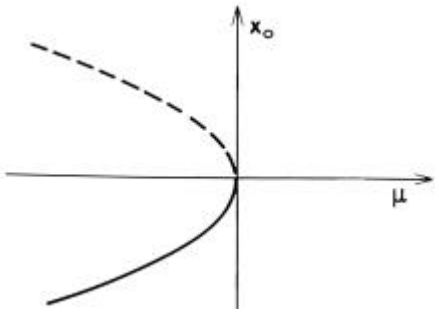
Hopf-Bifurkation: benannt nach dem Mathematiker E. Hopf.

3.5 Superkritische und subkritische Bifurkation

Die Umkehrung des Vorzeichens der nichtlinearen Terme in den dynamischen Gleichungen verändert die Bifurkation. Man unterscheidet die Unterklassen superkritisch (überkritisch) und subkritisch (unterkritisch).

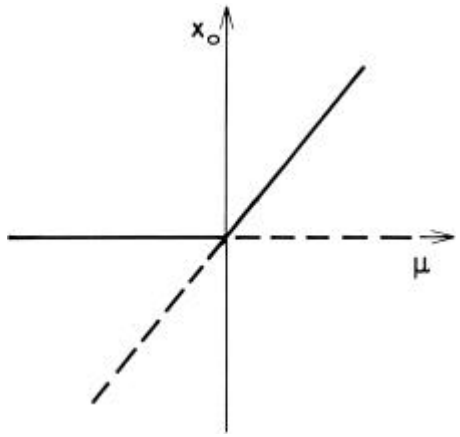
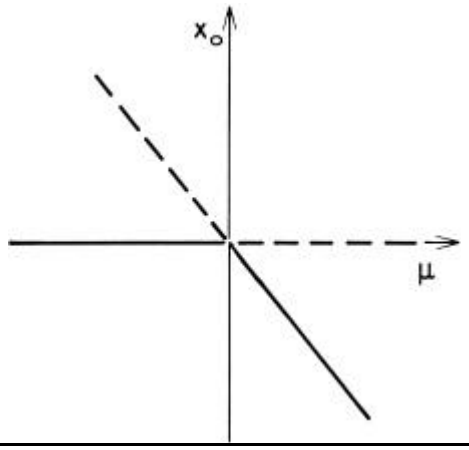
Im folgenden sind für die vorgestellten Klassen von Bifurkationen die Ergebnisse der Rechnung für beide Unterklassen aufgelistet.

1. Sattel-Knoten-Bifurkation

superkritisch (überkritisch)	subkritisch (unterkritisch)
dynamische Gleichung: $\dot{x} = m - x^2$	dynamische Gleichung: $\dot{x} = m + x^2$
Fixpunkte: $x_0^{(1)} = \sqrt{m}\,,\ x_0^{(2)} = -\sqrt{m}$	Fixpunkte: $x_0^{(1)} = \sqrt{-m}\,,\ x_0^{(2)} = -\sqrt{-m}$
Für $\mu < 0$ existiert kein Fixpunkt!	Für $\mu > 0$ existiert kein Fixpunkt!
linearisierte Differentialgleichung: $d\dot{x} = -2x_0 dx$	linearisierte Differentialgleichung: $d\dot{x} = 2x_0 dx$
1. Fixpunkt: $x_0^{(1)} = \sqrt{m} \Rightarrow stabil$	1. Fixpunkt: $x_0^{(1)} = \sqrt{-m} \Rightarrow instabil$
2. Fixpunkt: $x_0^{(2)} = -\sqrt{m} \Rightarrow instabil$	2. Fixpunkt: $x_0^{(2)} = -\sqrt{-m} \Rightarrow stabil$
	

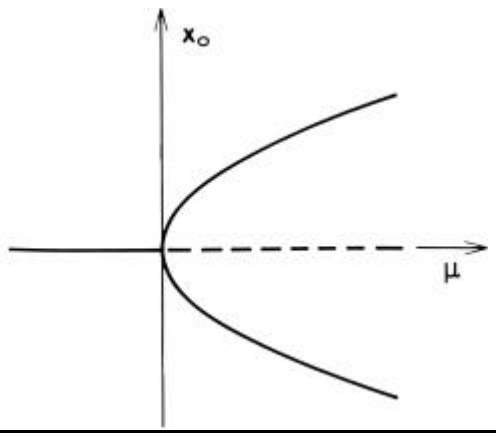
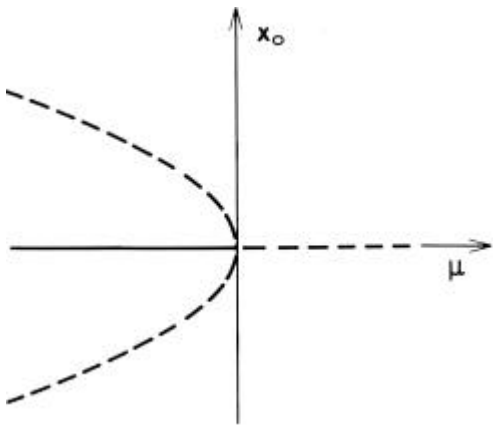
Die beiden Fälle sind, im Gegensatz zu 3. und 4., topologisch äquivalent.

2. Transkritische Bifurkation

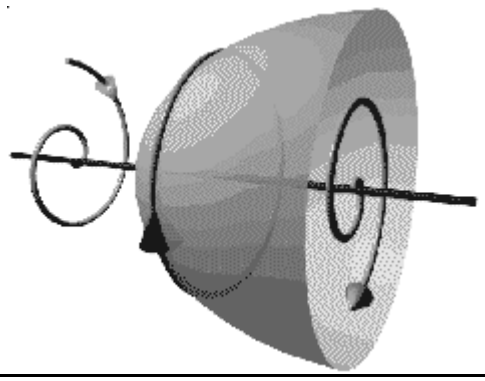
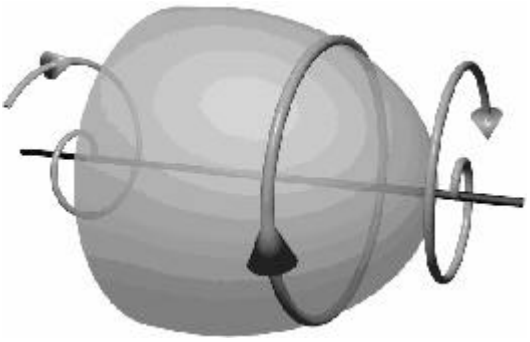
superkritisch (überkritisch)	subkritisch (unterkritisch)
dynamische Gleichung: $$\dot{x} = mx - x^2$$	dynamische Gleichung: $$\dot{x} = mx + x^2$$
Fixpunkte: $$x_0^{(1)} = 0\,,\ x_0^{(2)} = m$$	Fixpunkte: $$x_0^{(1)} = 0\,,\ x_0^{(2)} = -m$$
linearisierte Diffefferentialgleichung: $$d\dot{x} = (m - 2x_0)dx$$	linearisierte Differentialgleichung: $$d\dot{x} = (m + 2x_0)dx$$
1. Fixpunkt: $$x_0^{(1)} = 0 \begin{cases} stabil\ \ für\ \ m < 0 \\ instabil\ \ für\ \ m > 0 \end{cases}$$	1. Fixpunkt: $$x_0^{(1)} = 0 \begin{cases} stabil\ \ für\ \ m < 0 \\ instabil\ \ für\ \ m > 0 \end{cases}$$
2. Fixpunkt: $$x_0^{(2)} = m \begin{cases} stabil\ \ für\ \ m > 0 \\ instabil\ \ für\ \ m < 0 \end{cases}$$	2. Fixpunkt: $$x_0^{(2)} = -m \begin{cases} stabil\ \ für\ \ m > 0 \\ instabil\ \ für\ \ m < 0 \end{cases}$$
	

Hier wird sehr schön deutlich, daß man von der superkritischen zur subkritischen Bifurkation nicht einfach durch Punktspiegelung am Ursprung gelangt. Dennoch sind die beiden Fälle, im Gegensatz zu 3. und 4., topologisch äquivalent.

3. Heugabel-Bifurkation

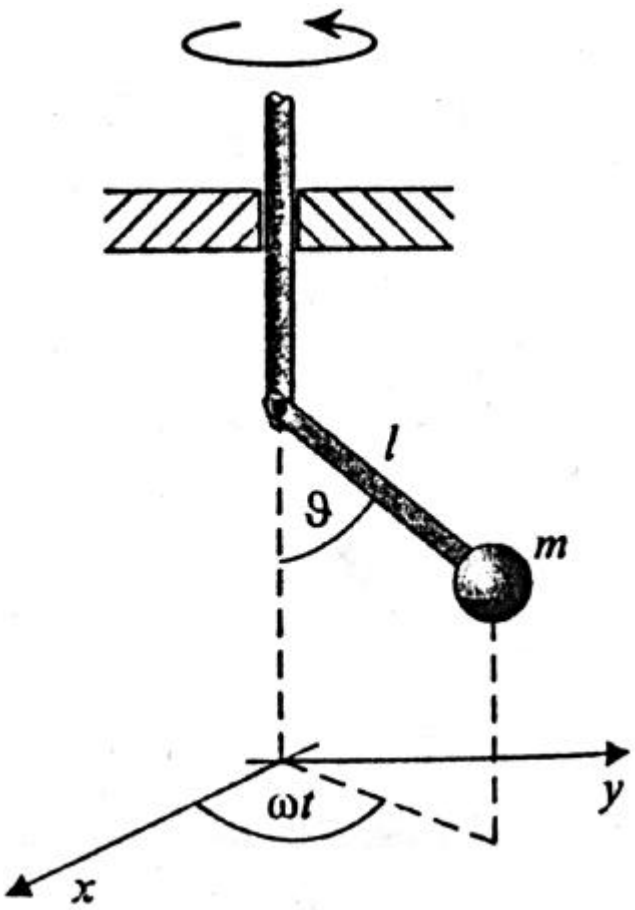
superkritisch (überkritisch)	subkritisch (unterkritisch)
dynamische Gleichung: $$\dot{x} = mx - x^3$$ Fixpunkte: $$x_0^{(1)} = 0\,,\quad x_0^{(2/3)} = \pm\sqrt{m}$$ Für $\mu < 0$ verschwinden die Fixpunkte $x_0^{(2/3)}$!	dynamische Gleichung: $$\dot{x} = mx + x^3$$ Fixpunkte: $$x_0^{(1)} = 0\,,\quad x_0^{(2/3)} = \pm\sqrt{-m}$$ Für $\mu > 0$ verschwinden die Fixpunkte $x_0^{(2/3)}$!
linearisierte Differentialgleichung: $$d\dot{x} = (m - 3x_0^2)dx$$ 1. Fixpunkt: $$x_0^{(1)} = 0 \begin{cases} stabil \;\; für \;\; m < 0 \\ instabil \;\; für \;\; m > 0 \end{cases}$$ 2./3. Fixpunkt: $x_0^{(2/3)} = \pm\sqrt{m}$ stabil, da $\mu > 0$	linearisierte Differentialgleichung: $$d\dot{x} = (m + 3x_0^2)dx$$ 1. Fixpunkt: $$x_0^{(1)} = 0 \begin{cases} stabil \;\; für \;\; m < 0 \\ instabil \;\; für \;\; m > 0 \end{cases}$$ 2./3. Fixpunkt: $x_0^{(2/3)} = \pm\sqrt{-m}$ instabil, da $\mu < 0$
	

4. Hopf-Bifurkation

superkritisch (überkritisch)	subkritisch (unterkritisch)
dynamische Gleichung: $$\dot{r} = mr - r^3$$ und $$\dot{j} = 1$$	dynamische Gleichung: $$\dot{r} = mr + r^3$$ und $$\dot{j} = 1$$
1. Lösung: $$r_0^{(1)} = 0 \wedge \dot{j} = 1$$ $$\begin{cases} stabil \;\; für \;\; m < 0 \\ instabil \;\; für \;\; m > 0 \end{cases}$$	1. Lösung: $$r_0^{(1)} = 0 \wedge \dot{j} = 1$$ $$\begin{cases} stabil \;\; für \;\; m < 0 \\ instabil \;\; für \;\; m > 0 \end{cases}$$
2. Lösung: $$r_0^{(2/3)} = \pm\sqrt{m} \wedge \dot{j} = 1$$ stabil, da $\mu > 0$	2. Lösung: $$r_0^{(2/3)} = \pm\sqrt{-m} \wedge \dot{j} = 1$$ instabil, da $\mu < 0$
	

4. Beispiele

Zentrifugalrotator:



Bewegungsgleichung in Kugelkoordinaten:

$$\ddot{J} - (w^2 Cos[J] - \frac{g}{l}) Cos[J] = 0$$

stationäre Lösungen:

$$J_1 = 0$$

$$J_2 = ArcCos[\frac{g}{l * w^2}] \quad \left(w^2 > \frac{g}{l} \right)$$

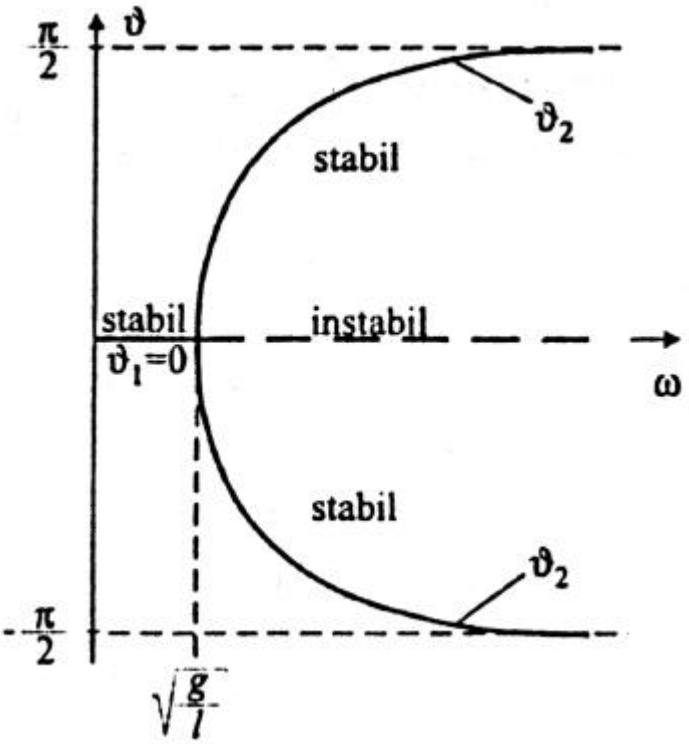
$$J_3 = \Pi$$

Stabilität:

- $J_1 = 0 \quad \begin{cases} stabil \quad für \quad w^2 < \dfrac{g}{l} \\ instabil \quad für \quad w^2 > \dfrac{g}{l} \end{cases}$

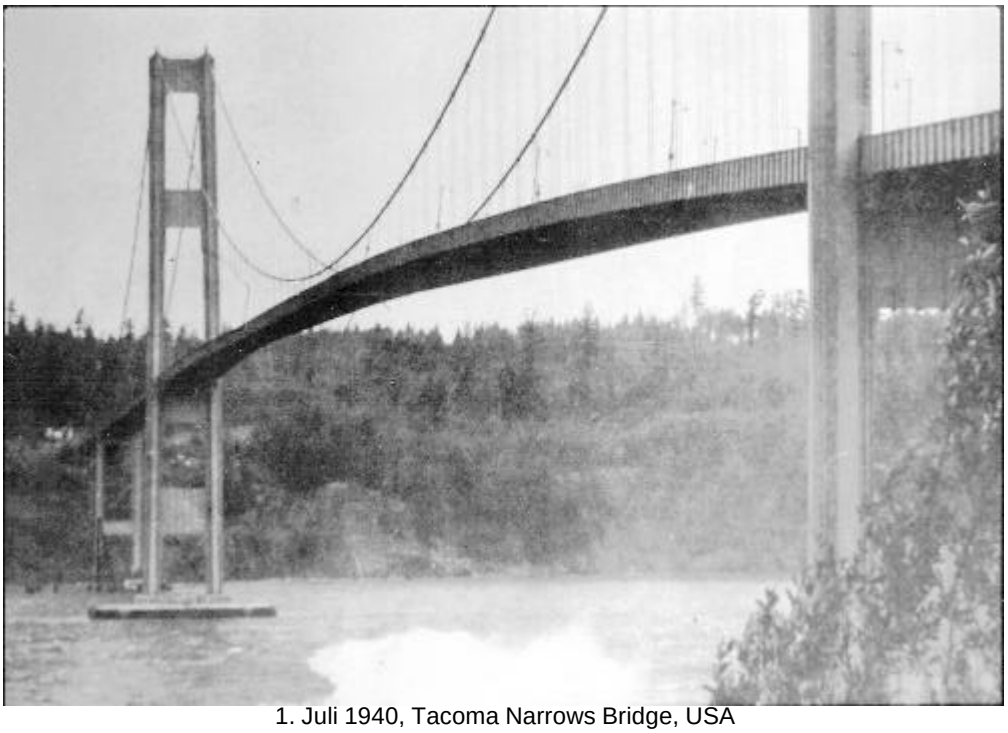
- $J_2 = ArcCos[\frac{g}{l * w^2}]$ stabil, existiert nur für $\left(w^2 > \frac{g}{l} \right)$

- $J_3 = \Pi$ instabil

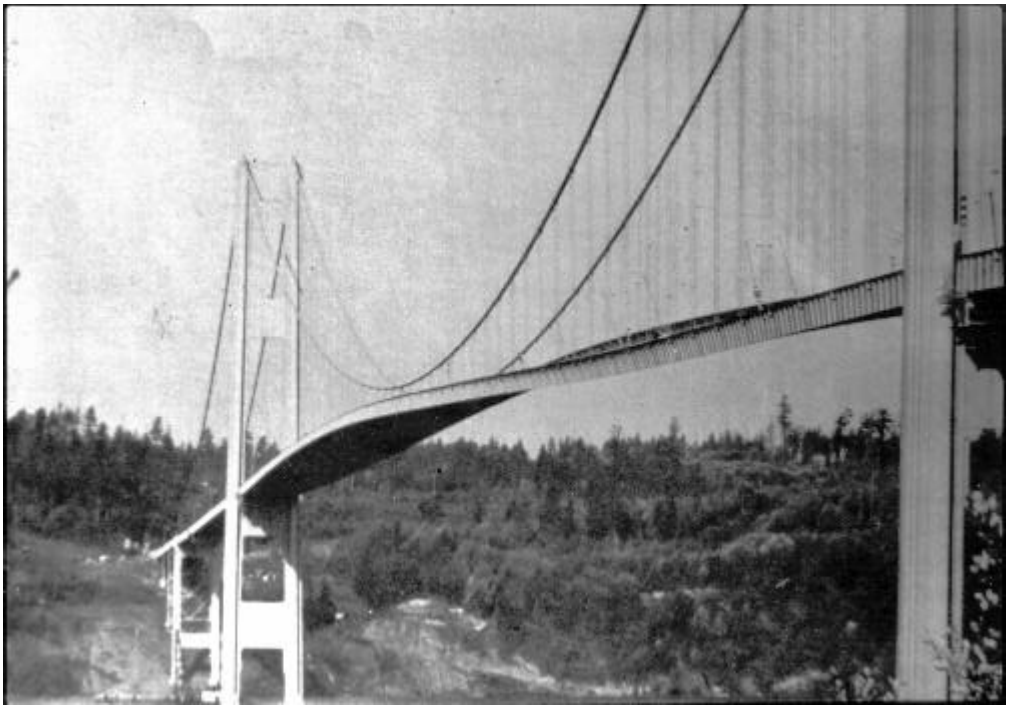


Aus dem Bild im Parameterraum ist ersichtlich, daß es sich um eine Heugabel Bifurkation handelt (siehe auch Abschnitt 3.3, Beispiel aus „Klassische Mechanik“, F.Kuypers, 6. Auflage, VCH).

Tacoma Bridge:

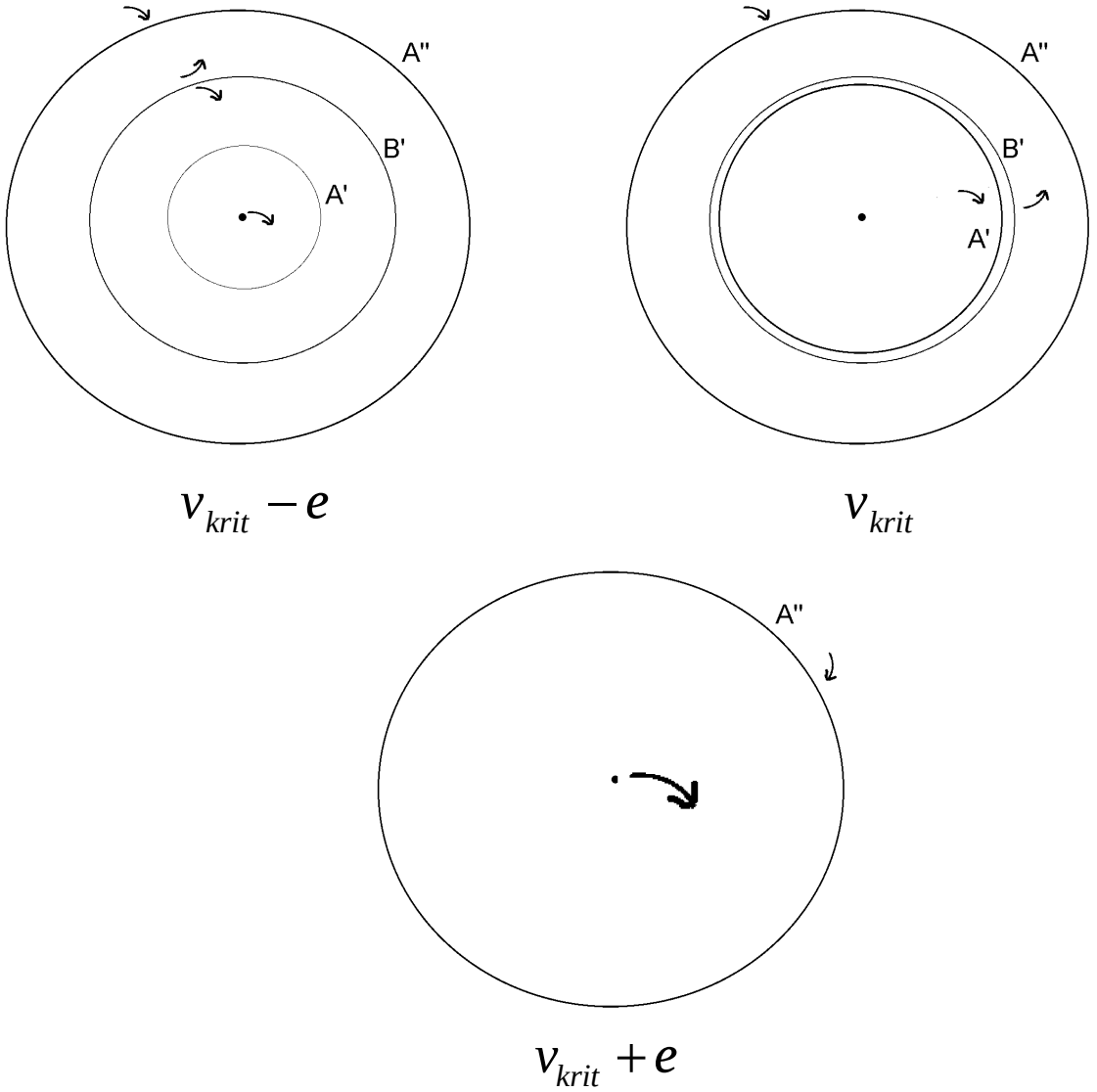


1. Juli 1940, Tacoma Narrows Bridge, USA



Windstärken zwischen 65 und 75 km/h regen die Brücke zu Torsions-schwingungen an. Der Sturm verliert nicht an Heftigkeit, die durch den Wind angeregte Schwingung kommt in Resonanz mit der Eigen-frequenz der Brücke. Die rasch anwachsende Amplitude der Schwingung zerstört am Ende die Tacoma Bridge.

Die Tacoma Bridge ist ein Beispiel für die Cyclic Fold Bifurkation (Sattel-Knoten-Bifurkation eines stabilen und eines instabilen Grenzzyklus):



A’,A’’: stabiler Grenzzykuls B: instabiler Grenzzykuls

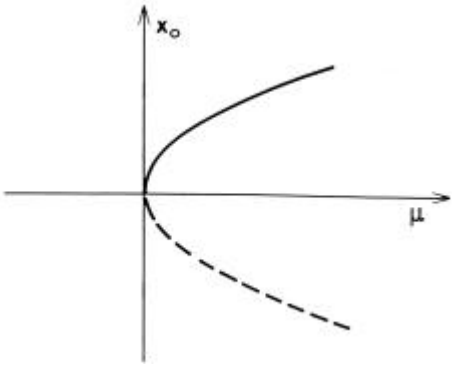
In den obigen Abbildungen kann der Vorgang dieser Bifurkation beobachtet werden. Dabei ist der veränderte Parameter v die Windgeschwindigkeit, die um 2ε zunimmt und so die Auslenkung der Brücke (entspricht dem kleinsten stabilen Zyklus) von **A'** nach **A''** verändert. Für eine so starke Auslenkung war die Brücke jedoch nicht elastisch genug gebaut. Bei der Windgeschwindigkeit v_{crit} passiert die Bifurka-tion.
Dabei ist der stabile Grenzzyklus **A'** mit dem instabilen Grenzzyklus **B'** kollidiert und beide sind verschwunden; nur der zweite stabile Zyklus **A''** ist übergeblieben. Diesen hat die Brücke allerdings nicht überlebt. Die Veränderung des Zyklus von **A'** auf **A''** nennt man auch „Catastrophic

Transition“. Bei dieser Art der „Catastrophic Bifurcation“ handelt es sich um die Cyclic Fold oder auch Periodic Fold Bifurcation, die das Analogon zur Sattel-Knoten-Bifurkation von Fixpunkten (bezüglich des Radius) darstellt.

5. Zusammenfassung

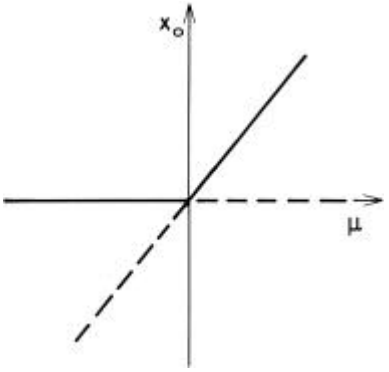
Sattel-Knoten Bifurkation:

$$\dot{x} = m - x^2$$



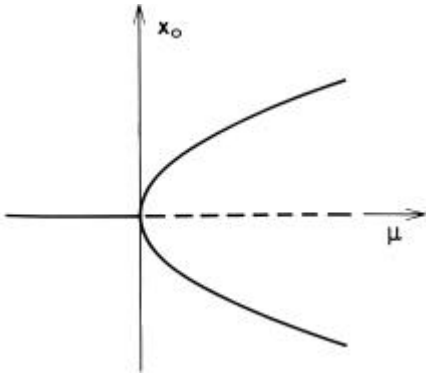
Transkritische Bifurkation:

$$\dot{x} = mx - x^2$$

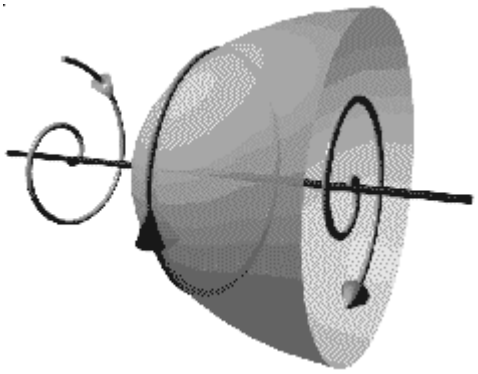


Heugabel-Bifurkation:

$$\dot{x} = mx - x^3$$



Hopf-Bifurkation:



6. Literaturverzeichnis:

„Mechanik“, F.Scheck, Springer Verlag (Berlin, 1996)

„Klassische Mechanik“, F.Kuypers, 5.Auflage, VCH-Verlag (Weinheim, 1997)

„Nonequilibrium Phase Transitions in Semiconductors”, E.Schöll, Springer Verlag (Berlin, 1987)

„Nonlinear Spatio-Temporal Dynamics and Chaos in Semiconductors“, E.Schöll, Cambridge University Press, in Druck (2000)

http://www.cg.tuwien.ac.at/research/vis/seminar9596/3-bif/html/ , H.Doleisch, H.Feltl und R.Wegenkittl

„Nichtlineare Dynamik, Bifurkationen und Chaotische Systeme“, P.Plaschko und K.Brod, Vieweg (Wiesbaden, 1995)

„Analyse Chaotischer Systeme“, Thorsten Buzug, Spektrum Akademischer Verlag (Berlin, 1994)

„Musterbildung in Reaktions-Diffusions-Systemen vom Aktivator-Inhibitor-Typ in zwei Dimensionen“, Diplomarbeit Miriam Löschau, TU Berlin